

en négligeant le produit des infiniments petits :

$$(15) \quad -\frac{P}{\eta L} = \frac{dt}{dr} + \frac{t}{r}$$

par intégration de cette équation on obtient :

$$(16) \quad t = -\frac{Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r}$$

appelons  $r_0$  le rayon pour lequel  $t = 0$ . Alors

$$-\frac{Pr_0}{2\eta L} + \frac{C}{r_0} = 0$$

d'où :

$$(17) \quad r_0 = \sqrt{\frac{2\eta CL}{P}}$$

Pour ce rayon  $r_0$  la force de frottement visqueux sera nulle puisque  $\frac{dv}{dr} = 0$  c'est donc précisément le rayon effectif que nous cherchons.

L'écoulement visqueux du liquide entre piston et cylindre a pour résultat d'accroître le rayon du piston de  $r_1$  à  $r_0$ .

La constante C est fixée par les conditions aux limites.

Reprenons

$$(16) \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r}$$

après intégration

$$(18) \quad v = -\frac{Pr^2}{4\eta L} + C \log r + K.$$

La vitesse s'annule à la surface du piston et du cylindre, c'est-à-dire  $v = 0$  pour  $r = r_1$  et  $r = r_2$ . Donc

$$-\frac{P(r_2^2 - r_1^2)}{4\eta L} = C \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$(19) \quad C = -\frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

Introduisons (19) dans (17)

$$(20) \quad r_0 = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_1}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}}}$$

Cette expression du rayon effectif est identique à celle définie par MEYERS et JESSUP (21).

MICHELS arrive à une valeur du rayon effectif qui diffère de l'expression (20); la différence provient du fait que cet auteur a simplifié le problème en faisant l'hypothèse que les deux parois sont planes et parallèles. Dans ce cas spécial

l'expression (14) se simplifie :

$$-PY dr = \eta LY (t + dt) - \eta LY t$$

Y étant la largeur de la paroi.

Ou encore :

$$-\frac{P}{\eta L} dr = Ct.$$

Par intégration :

$$t = -\frac{P}{\eta L} r + C.$$

Si  $r_0$  désigne de nouveau le rayon pour lequel  $t = 0$  on obtient :

$$(21) \quad r_0 = \frac{C\eta L}{P}.$$

L'intégration de

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P}{\eta L} r - Cr$$

donne lieu à

$$v = -\frac{P}{2\eta L} r^2 + Cr + K$$

$v$  étant = 0 pour  $r = r_1$  et  $r = r_2$  nous avons :

$$0 = -\frac{P}{2\eta L} (r_2^2 - r_1^2) + C (r_2 - r_1)$$

$$C = \frac{P}{2\eta L} (r_2 + r_1).$$

En introduisant cette valeur dans (21) il suit :

$$r_0 = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

Le rayon effectif est égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et du cylindre. (Signalons que MICHELS arrive à ce même résultat par une méthode différente.)

MEYERS et JESSUP ont montré que l'expression (20) peut être développée en série. Posons

$$\frac{r_2}{r_1} - 1 = x$$

d'autre part

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$